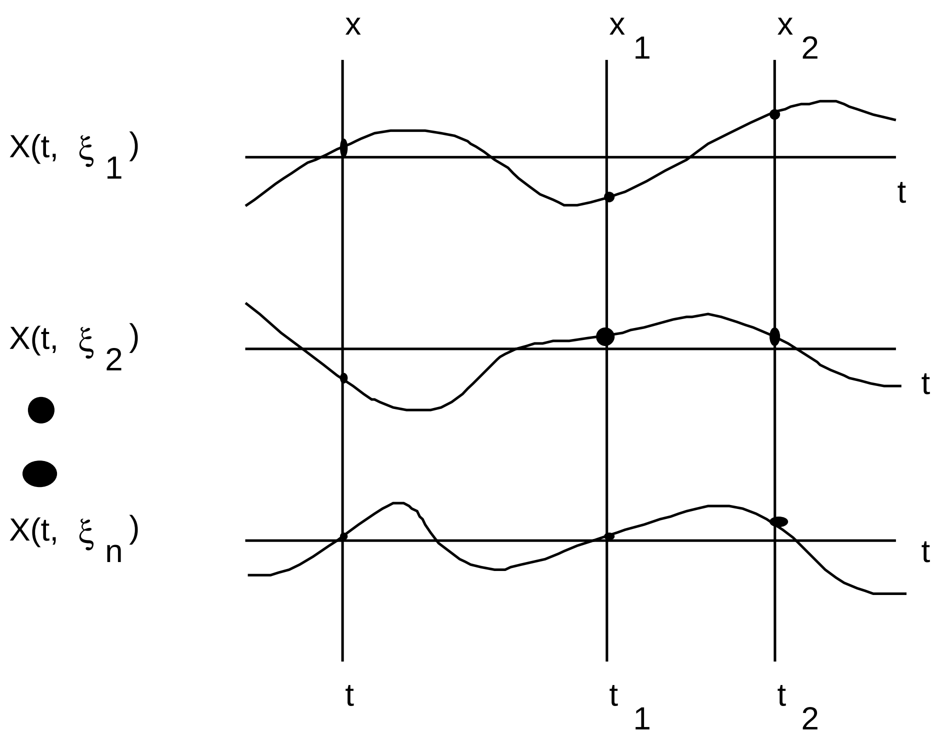
TEMA IV.- SEÑALES ALEATORIAS Y RUIDO

IV.1.- CARACTERIZACION DE SEÑALES ALEATORIAS

Una variable aleatoria x es una regla que asigna un número $x(\xi)$ al resultado de un experimento ξ.

Una señal aleatoria o proceso estocástico asigna una función $x(t,\xi)$ al resultado de un experimento, de esta forma, una señal aleatoria es un conjunto de funciones temporales dependientes de un parámetro ξ. Cuando no haya ambigüedad, se utilizará la notación x(t) para la señal aleatoria, omitiendo el parámetro ξ.

Como ejemplo de señal aleatoria puede considerarse el conjunto de voltajes, generados por el movimiento térmico de los electrones, en bornas de un gran número de resistencias idénticas. La figura presenta algunos de estos voltajes para distintos resultados del experimento.



Si se fija el parámetro ξ (resultado de un experimento) se obtiene una función temporal que se denomina "función muestra" o "realización" del proceso.

Fijada la variable tiempo t se tiene una variable aleatoria x ($t_1 \rightarrow x_1$, $t_2 \rightarrow x_2$) de esta forma, una señal aleatoria puede considerarse como un conjunto infinito de variables aleatorias, una para cada instante de tiempo t.

Fijados el parámetro ξ y la variable temporal t se tiene un número.

IV.2.- FUNCIONES DE DENSIDAD DE PROBABILIDAD DE UN PROCESO ALEATORIO

Para un t dado, el proceso es una variable aleatoria x con una función de distribución dependiente de t.

$$F(x,t) = P\{x(t) \leq x\}$$

Que es igual a la probabilidad del suceso $\{x(t) \leq x\}$ consistente en todas las realizaciones posibles, en el instante t, tales que $x(t,\xi_i)$ no exceden el número x.

La función densidad de probabilidad será

$$f(x,t) = \frac{\partial F(x,t)}{\partial x}$$

en los instantes t_1 y t_2 se tienen dos variables aleatorias y la función de distribución conjunta de ambas variables

$$F(x_1, x_2 ; t_1, t_2) = P\{x(t_1) \leq x_1 , x(t_2) \leq x_2\}$$

La correspondiente función de densidad será :

$$f(x_1, x_2 ; t_1, t_2) = \frac{\partial^2 F(x_1, x_2 ; t_1, t_2)}{\partial x_1 \, \partial x_2}$$

Análogamente podrían obtenerse las funciones de orden superior

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n ; t_1, t_2, \ldots, t_n)$$

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n ; t_1, t_2, \ldots, t_n)$$

La caracterización completa del proceso requeriría conocer estas funciones para cualquier orden n. Sin embargo, en muchas aplicaciones, sólo ciertos promedios son utilizados; más concretamente, los que sólo involucran las funciones de primer y segundo orden.

IV.3.- VALOR MEDIO DEL PROCESO

Se define el valor medio de x(t) como el valor esperado de la variable aleatoria x en el instante t

$$\eta(t) = E\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x,t) dx$$

IV.4.- AUTOCORRELACION

La autocorrelación de un proceso $R(t_1, t_2)$ se define como el valor esperado del producto $x(t_1)\, x(t_2)$.

$$R(t_1, t_2) = E\{x(t_1)x(t_2)\} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_1\, x_2\, f(x_1, x_2; t_1, t_2)\, dx_1\, dx_2$$

El valor $R(t_1, t_2)$ para $t_1 = t_2 = t$ es la potencia media del proceso

$$P_m(t) = R(t,t) = E\{x^2(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x,t) dx$$

IV.5.- AUTOCOVARIANZA

Es la autocorrelación del proceso centrado $x(t)-\eta(t)$. Es fácil de ver que

$$C(t_1, t_2) = R(t_1, t_2) - \eta(t_1)\, \eta(t_2)$$

EJEMPLO

Sea el proceso

$$x(t) = a \cos(\omega t + \varphi)$$

donde a y φ son dos variables aleatorias independientes y φ es una variable aleatoria uniforme en el intervalo $(-\pi,\pi)$, es decir :

$$f(\varphi) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi} & -\pi \leq \phi < \pi \\ 0 & \text{RESTO} \end{cases}$$

El valor medio del proceso será

$$\eta(t) = E\{(x(t)\} = E\{a\}\, E\{(\cos(\omega t + \varphi)\}$$

de las propiedades de las variables aleatorias

$$E\{\cos(\omega t + \varphi)\} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi} \cos(\omega t+\varphi)\, d\varphi = 0$$

Luego

$$\eta(t) = 0$$

La autocorrelación vendrá dada por

$$R(t_1 ,t_2) = E\{x(t_1)x(t_2)\} =$$

$$= E\{a^2\cos(\omega t_1 + \varphi) \cos(\omega t_2 + \varphi)\}$$

Desarrollando el producto de cosenos

$$R(t_1 ,t_2) = \frac{1}{2} E\{a^2\}\; E\{\cos\omega[(t_1+t_2) + 2\varphi] + \cos\omega(t_1 - t_2)\}$$

El valor medio del primer término es cero

$$R(t_1 ,t_2) = \frac{1}{2} E\{a^2\} \cos\omega\,(t_1 - t_2)$$

La potencia media del proceso vale $(t_1 = t_2)$

$$P_m = R(t,t) = \frac{1}{2} E\{a^2\}$$

Obsérvese que si la variable aleatoria a es una constante, los resultados anteriores coinciden con los equivalentes de señales periódicas determinísticas.

$$\eta(t) = 0$$

$$R(t_1 , t_2) = R(\tau) = \frac{1}{2} a^2 \cos\omega\tau$$

$$P_m = \frac{1}{2} a^2$$

con $\tau = t_1 - t_2$ ya que la correlación del proceso no depende de los instantes absolutos t_1 y t_2 , sino de su diferencia.

IV.6.- VALOR MEDIO Y AUTOCORRELACION EN FUNCION DE LAS REALIZACIONES DEL PROCESO

Si las propiedades estadísticas de un proceso (funciones de distribución y de densidad de probabilidad) son desconocidas, pero se dispone de un gran número de realizaciones del mismo, $x(t,\xi_i)$ $i = 1, . . . , N$, el valor medio y la autocorrelación pueden obtenerse de manera aproximada como

$$\eta(t) \cong \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x(t,\xi_i)$$

$$R(t_1 ,t_2) \cong \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x(t_1 , \xi_i) \, x (t_2 ,\xi_i)$$

IV.7.- PROCESOS COMPLEJOS

Las definiciones anteriores pueden extenderse al caso que x(t) sea complejo. El valor medio es el mismo y la autocorrelación se define como

$$R(t_1 ,t_2) = E\{x(t_1) \, x^*(t_2)\}$$

La potencia media será

$$P_m(t) = E\{|x(t)|^2 \}$$

EJEMPLO

$$x(t) = ae^{j(\omega t+\varphi)}$$

donde a y φ tienen el mismo significado que en el ejemplo anterior.

$$\eta(t) = 0$$

$$R(t_1 , t_2) = E\{x(t_1)x(t_2)\} = E\{|a|^2\} e^{j\omega(t_1-t_2)}$$

$$P_m = E\{|a|^2\}$$

IV.8.- PROCESOS ESTACIONARIOS EN SENTIDO ESTRICTO

Se dice que un proceso es estacionario en sentido estricto si sus propiedades estadísticas son invariantes ante un desplazamiento del origen de tiempos, esto es, x(t) y x(t+c) tienen las mismas propiedades para todo c. De esta forma

$$f(x_1 , x_2 , \ldots , x_n ; t_1 , t_2 , \ldots, t_n) =$$

$$f(x_1 ,x_2 , \ldots , x_n ;t_1 +c, t_2 +c, \ldots , t_n + c)$$

La consecuencia es que la función de densidad de primer orden

$$f(x,t) = f(x,t+c) = f(x)$$

No depende del tiempo y por tanto el valor medio del proceso será constante.

Análogamente, la función de densidad de segundo orden :

$$f(x_1 ,x_2 ;t_1 ,t_2) = f(x_1 ,x_2 ;t_1 +c,t_2 +c) = f(x_1 ,x_2 ;\tau)$$

No depende de los instantes absolutos t_1 y t_2 , sino sólo de su diferencia $\tau = t_1 - t_2$. Por tanto la autocorrelación sólo dependerá de τ y para estos procesos puede definirse

$$R(\tau) = E\{x(t+\tau)\ x^*(t)\}$$

Definición equivalente en forma a la de la autocorrelación de señales determinísticas de potencia media finita, cambiando el promedio temporal de estas últimas por el promedio en el conjunto (esperanza matemática).

La potencia media valdrá

$$P_m = E\{|x(t)|^2\} = R(0)$$

Independiente del tiempo.

Puede definirse la correlación cruzada de dos procesos estacionarios (una definición equivalente puede darse para dos procesos cualesquiera) como

$$R_{xy}(\tau) = E\{x(t+\tau)\, y^*(t)\}$$

IV.9.- PROCESOS ESTACIONARIOS EN SENTIDO AMPLIO O DEBILMENTE ESTACIONARIOS

Un proceso es estacionario en sentido amplio si lo es sólo hasta orden 2, es decir, si

$$E\{x(t)\} = \eta \quad \text{constante}$$

$$E\{x(t+\tau)x^*(t)\} = R(\tau)$$

IV.10.- ESPECTRO DE POTENCIA DE UN PROCESO ESTACIONARIO

El espectro de potencia o densidad espectral de potencia de un proceso aleatorio estacionario x(t), $S_{XX}(\omega)$ nos dice como se distribuye la potencia media en el dominio de la frecuencia. De acuerdo con el teorema de Wiener-Kinchine, $S_{XX}(\omega)$ puede calcularse como la transformada de Fourier de la autocorrelación $R_{XX}(\tau)$.

$$S_{XX}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{XX}(\tau)\, e^{-j\omega\tau}\, d\tau$$

Inversamente

$$R_{xx}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{xx}(\omega)\; e^{j\omega\tau}\, d\omega$$

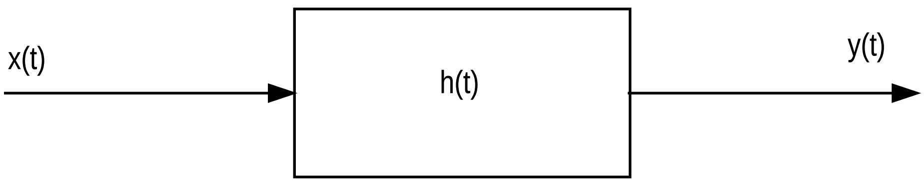
Análogamente, el espectro de potencia cruzada de dos señales aleatorias estacionarias viene dado por

$$S_{xy}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xy}(\omega)\; e^{-j\omega\tau}\; dt)$$

$$R_{xy}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{xy}(\omega)\; e^{j\omega\tau}\, d\omega$$

IV.11.- PROCESOS ESTACIONARIOS Y SISTEMAS LINEALES

Sea x(t) un proceso estacionario de media η_x y autocorrelación $R_{xx}(\tau)$, de entrada a un sistema lineal e invariante como el de la figura



El valor medio del proceso de salida, y(t) (también estacionario) será

$$\eta_y = E\{y(t)\} = E\left\{ \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)\; h(\tau) d\tau \right\}$$

Intercambiando el operador esperanza por el operador integral (ambos lineales)

$$\eta_y = \int_{-\infty}^{\infty} E\{x(t-\tau)\}\; h(\tau)\; d\tau\}$$

Por ser x(t) estacionario

$$\eta_y = \int_{-\infty}^{\infty} \eta_x h(\tau)d\tau = \eta_x H(0)$$

La correlación cruzada salida-entrada es

$$R_{yx}(\tau) = E\{y(t+\tau)\, x^*(t)\}$$

$$= E\left\{x^*(t) \int_{-\infty}^{\infty} x(t+\tau-\alpha)h(\alpha)d\alpha\right\}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} E\{x^*(t)x(t+\tau-\alpha)\}\, h(\alpha)d\alpha$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(\tau-\alpha)\, h(\alpha)\, d\alpha$$

o bien

$$R_{yx}(\tau) = R_{xx}(\tau) * h(\tau)$$

El espectro cruzado será

$$S_{yx}(\omega) = S_{xx}(\omega)\; H(\omega)$$

La autocorrelación del proceso de salida valdrá

$$R_{yy}(\tau) = e\{y(t+\tau)y^*(t)\} = E\left\{y(t+\tau) \int_{-\infty}^{\infty} x^*(\tau-\alpha)\, h^*(\alpha)d\alpha\right\}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} E\{y(t+\tau)x^*(t-\alpha)\;\; h(\alpha)d\alpha = \int_{-\infty}^{\infty} R_{yx}(\tau+\alpha)\, h^*(\alpha)d\alpha$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} R_{yx}(\tau-\lambda)\;\; h^*(-\lambda)d\lambda \qquad\qquad \lambda = -\alpha$$

o bien

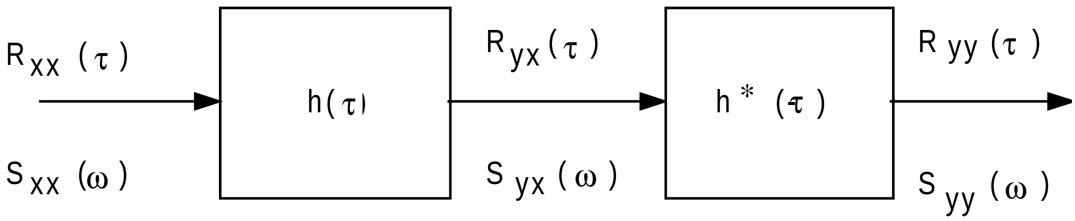
$$R_{yy}(\tau) = R_{yx}(\tau) * h^*(-\tau)$$

en función de la autocorrelación de la entrada

$$R_{yy}(\tau) = R_{xx}(\tau) * h(\tau) * h^*(-\tau)$$

y el espectro de salida

$$S_{yy}(\omega) = S_{xx}(\omega) \ |H(\omega)|^2$$



Estas relaciones son idénticas a las de las señales determinísticas.

IV.12.- PROCESOS ERGODICOS

El problema central en teoría de procesos es la estimación de sus propiedades estadísticas, cuando éstas no son conocidas. ya se ha visto antes que si se dispone de un gran número de realizaciones, pueden estimarse se media y autocorrelación. En muchas aplicaciones, sólo se tiene acceso a una sola realización y el único promedio que puede utilizarse es el temporal. Así por ejemplo, puede estimarse el valor medio del proceso como

$$\underline{\eta} = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)dt$$

Donde x(t) significa ahora una realización o función muestra conocida. ¿Bajo qué condiciones $\underline{\eta}$ es una buena estima de η, valor medio del proceso?

Se dice que el proceso es ergódico en la media si

$$\underline{\eta} = \eta$$

Cualquiera que sea la realización (función muestra) x(t) del proceso. Puede concluirse que en un proceso ergódico en la media, el valor medio en el conjunto puede intercambiarse con el valor medio temporal de cualquiera de sus realizaciones.

Análogamente, un proceso es ergódico en correlación si la estima de la autocorrelación

$$R_{XX}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t+\tau)x^*(\tau)\, d\tau$$

con x(t) una realización cualquiera del proceso, coincide con la autocorrelación del proceso

$$R_{XX}(\tau) = R_{XX}(\tau) = E\{x(t+\tau)\, x^*(t)\}$$

Obsérvese la fuerte similitud existente entre los procesos ergódicos y las señales determinísticas de potencia media finita.

IV.13.- RUIDO TERMICO

Es el debido al movimiento errático de particulas cargadas (habitualmente electrones) en medios conductores. Johnson y Nyquist (1928) fueron los primeros en estudiar este ruido en resistencia metálicas, por lo que a veces se le conoce también como ruido Johnson.

Cuando una resistencia metálica R está a temperatura T, el movimiento errático de los electrones produce un voltaje de ruido en sus terminales en circuito abierto. Por el teorema central del límite, el voltaje v(t) es una distribución gaussiana de media cero y varianza (potencia).

$$P_V = E\,\{v^2(t)\} = \frac{2(\pi kT)^2}{3h} \quad R \qquad\qquad (\text{vol})^2$$

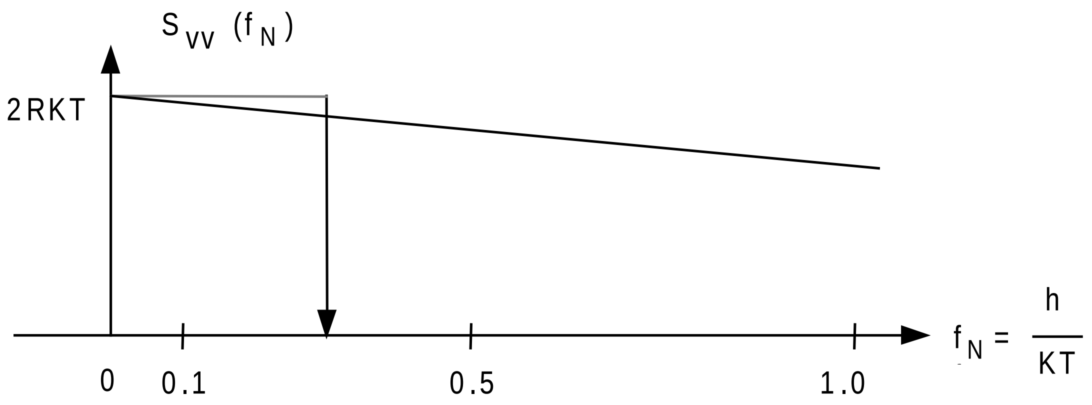
Donde

k = constante de Boltzmann = $1.37.10^{-23}$ Jul/°Kelvin
h = constante de Planck = $6{,}62.10^{-34}$ Julios.segundo

Mediante la mecánica cuántica, puede demostrarse que la densidad espectral de potencia de este ruido es

$$S_{VV}(f) = \frac{2Rh|f|}{e^{h|f|/kT} - 1} \qquad (vol^2)/Hz$$

Gráficamente para $f \geq 0$



Si $|f_N| << 1$, el espectro puede desarrollarse (mediante un desarrollo en serie de Taylor) por

$$S_{VV}(f) \cong 2RkT\left(1 - \frac{h|f|}{2kT}\right)$$

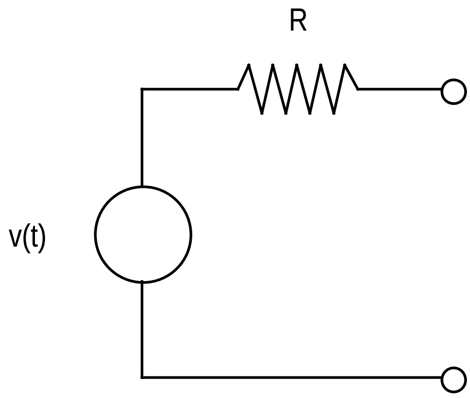
Suponiendo una temperatura ambiente de 290°K (27°C)

$$\frac{kT}{h} \cong 6.10^{12}\ \ Hz$$

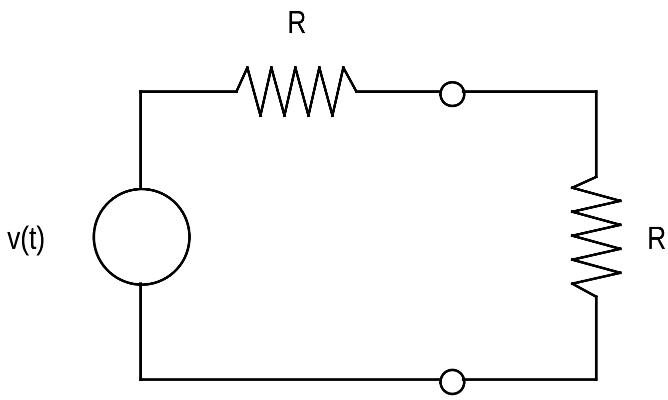
Luego la condición $|f| << \frac{kT}{h}$ se cumple para todo el margen de comunicaciones radio, además, el segundo sumando es despreciable frente a la unidad por lo que en ese margen, la densidad espectral puede considerarse prácticamente constante

$$S_{VV}\,(f) \cong 2RkT$$

El modelo de Thevenin equivalente para una resistencia con ruido es el de la figura



Donde ahora, la resistencia R es ideal (sin ruido) y el ruido está representado por el generador. La máxima potencia que éste puede entregar a una carga es cuando hay adaptación de impedancias, esto es, la carga z_L es la propia resistencia $z_L = R$, de esta forma, la potencia disponible será



$$P_d = \frac{E\{[v(t)/2]^2\}}{R} = \frac{E\{v^2(t)\}}{4R} = \frac{P_v}{4R}$$

Esto puede extenderse a la densidad espectral, siendo la máxima disponible

$$S_{vvd}(f) = \frac{S_{vv}(f)}{4R} = \frac{1}{2}\ kT = \frac{1}{2}\ \eta$$

Obsérvese que la máxima densidad espectral de ruido que una resistencia puede entregar a una carga adaptada no depende del valor de la resistencia, sólo depende de la temperatura, esta máxima densidad es la que emplearemos en lo sucesivo como espectro de potencia del ruido térmico en el margen de frecuencias de interés.

IV.14.- RUIDO BLANCO GAUSSIANO

Además de las resistencias, muchas otras fuentes de ruido son gaussianas y tienen un espectro de potencia plano en un amplio margen de frecuencias, para estas otras fuentes suele escribirse para la densidad espectral de potencia

$$S_{vv}(f) = \eta/2 \qquad \eta = kT_e$$

siendo T_e su temperatura equivalente de ruido : la temperatura a la que debería estar una resistencia para producir la misma densidad de potencia. Esta temperatura equivalente no coincidirá, en general, con la temperatura física.

Aunque la expresión anterior de la densidad espectral de potencia está limitada a un margen de frecuencias, puede extenderse a todo el dominio frecuencial. Este es el concepto de ruido blanco, por analogía con la luz blanca. Si n(t) es el proceso aleatorio que representa el ruido blanco, se tendrá

$$S_{nn}(f) = \eta/2 \qquad \forall f$$

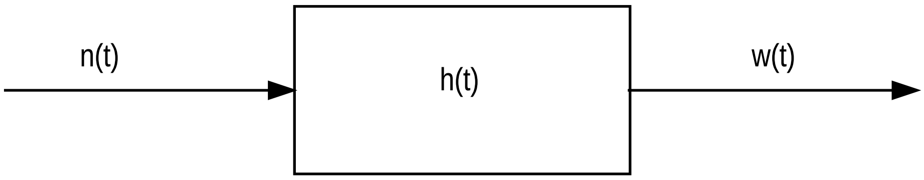
y su función de autocorrelación

$$R_{nn}(\tau) = \eta/2\ \delta(\tau)$$

es evidente que la potencia total es infinita. Esto no debe causar ningún problema, ya que los sistemas que filtren el ruido serán limitados en banda y la potencia de ruido de salida finita.

IV.15.- RUIDO BLANCO FILTRADO

Sea el ruido blanco n(t), la entrada a un sistema como el de la figura

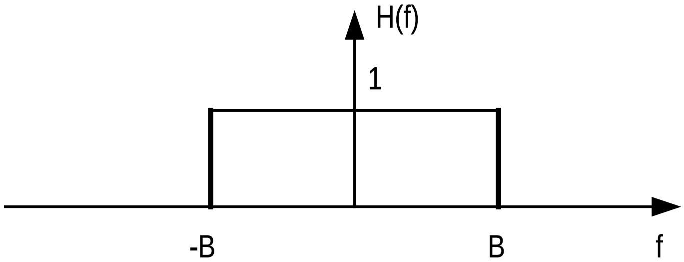


La densidad espectral del ruido de salida será

$$S_{WW}(f) = \eta/2 \ |H(f)|^2$$

Este ruido ya no es blanco, ya que su densidad espectral no es constante, sino que adopta la forma del filtro (ruido coloreado).

Ejemplo : Sea el sistema



La densidad espectral del ruido de salida será

$$S_{WW}(f) = \eta/2 \ \Pi\left(\frac{f}{2B}\right)$$

y su función de autocorrelación

$$R_{WW}(\tau) = \eta B \, \frac{\text{sen} 2\pi B\tau}{2\pi B\tau}$$

La potencia de salida vale

$$P_W = R_{WW}\ (0) = \eta B$$

IV.16.- ANCHO DE BANDA EQUIVALENTE DE RUIDO

La potencia de ruido a la salida de un sistema cuando la entrada es ruido blanco, puede escribirse como

$$P_W = \eta \int_0^{\infty} |H(f)|^2 \, df$$

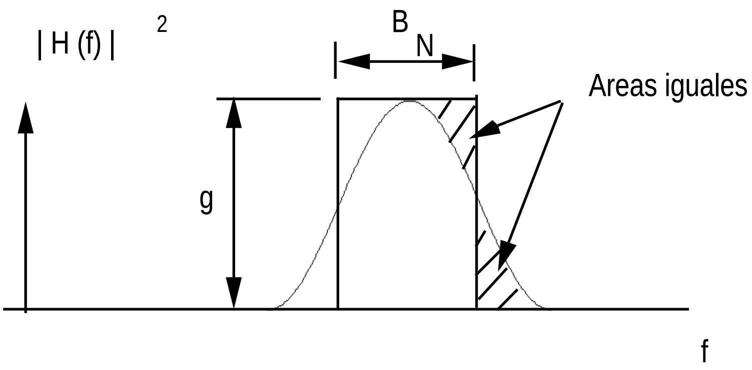
Suponiendo un filtro simétrico, puede definirse un ancho de banda equivalente de ruido como

$$B_N \overset{\Delta}{=} \frac{1}{g} \int_0^{\infty} |H(f)|^2 \, df$$

siendo $g^{1/2} = |H(f)|_{máx}$ la ganancia del filtro a la frecuencia central. De esta forma, la potencia de ruido a la salida sería

$$P_W = g \eta B_N$$

que es la potencia que se obtendría con un filtro ideal (rectangular) de ganancia g como se observa en la figura.



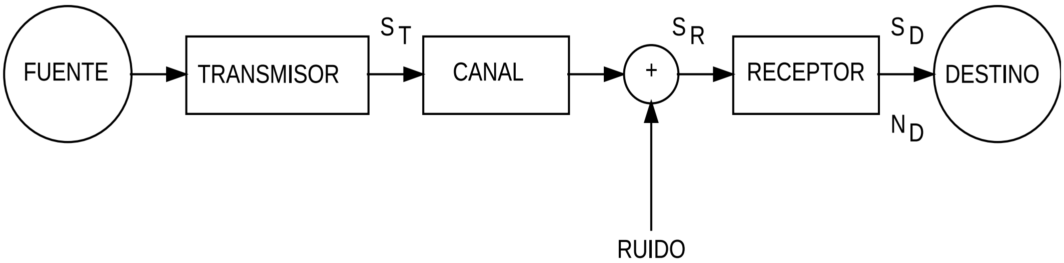
V.1.- SISTEMA DE TRANSMISION BANDA BASE ANALOGICO

Es un sistema de transmisión sin desplazamiento en frecuencia, es decir, sin ningún tipo de modulación. Aunque pocos son los sistemas que trabajan en banda base, las razones de su estudio son las siguientes :

- Los sistemas con modulación pueden estudiarse como los de banda base y muchos de los conceptos y parámetros de estos últimos son aplicables a los primeros.

- El sistema banda base sirve como elemento de comparación de las prestaciones de los distintos tipos de modulación.

V.2.- ELEMENTOS DEL SISTEMA DE TRANSMISION



S_T = Potencia de señal transmitida
S_R = Potencia de señal recibida
S_D = Potencia de señal en destino
N_D = Potencia de ruido en destino

V.2.1.- FUENTE

Genera la información o mensaje que se desea transmitir. El mensaje puede no ser una señal eléctrica por lo que se requerirá un transductor que convierta la información en señales eléctricas a la entrada del transmisor. Ejemplo : voz humana y micrófono en telefonía.

V.2.2.- TRANSMISOR

Dispone la señal mensaje para que sea transmitida al canal de comunicaciones. En banda base, será en general un simple amplificador que suministre la potencia necesaria de señal para su posterior recepción. En sistemas con modulación incluirá además el sistema de modulación.

V.2.3.- CANAL DE COMUNICACIONES

En banda base no es más que una línea de transmisión formada por cables eléctricos con distintas configuraciones geométricas. En sistemas que utilizan modulación el canal puede ser, además de las líneas de transmisión, fibras ópticas, guias de ondas a frecuencias de microondas, espacio libre (radiación electromagnética), etc.

La señal será distorsionada (se verá más adelante) y fundamentalmente atenuada a medida que se propaga por el canal. La atenuación es debida a diversos mecanismos según el canal : pérdidas por efecto Joule en conductores, dispersión de potencia radiada en el espacio libre, etc. Estas pérdidas las caracterizaremos, en ausencia de distorsión, por el parámetro L

$$L = \frac{P_e}{P_s}$$

siendo P_e la potencia de entrada al canaly P_s la potencia de salida. En el caso del sistema de transmisión

$$L = \frac{S_T}{S_R}$$

En general, las pérdidas se determinan en dBs

$$L_{dB} = 10\log P_e / P_s$$

por simplicidad se suprimirá el subíndice cuando no haya ambigüedad.

La potencia se medirá en dB-watios (dBw)

$$S_{TdB} = 10 \log S_T$$

estando S_T expresada en watios.

De esta forma las pérdidas en dBs pueden expresarse como :

$$L_{dB} = S_{TdB} - S_{RdB}$$

V.2.3.1.- PERDIDAS EN LINEAS DE TRANSMISION

La relación entre la potencia de entrada y salida en líneas de transmisión y guías de onda viene dada, para señales sinusoidales, por

$$P_S = e^{-2\alpha l} P_e$$

donde l es la longitud de la línea y α es la constante de atenuación por unidad de longitud. Las pérdidas en dBs serán

$$L = 10\log e^{2\alpha l} = 8{,}68\alpha l \text{ dBs}$$

y las pérdidas por unidad de longitud

$$L/m = 8{,}68\alpha \text{ dB/m}$$

L es un parámetro característico de cada línea

PERDIDAS DE ALGUNAS LINEAS

Línea de hilos paralelos (0.1cm de ϕ)	1kHz	0,05dB/km
Cable coaxial (1cm ϕ)	100kHz	1dB/km
	3MHz	4dB/km
Guía de ondas (5 x 2.5 cm)	10GHz	5dB/km
Fibra óptica monomodo	longitud de onda = 1,5μm	0,2dB/km

Obsérvese que las pérdidas en dBs son proporcionales a la longitud de la línea. Doblando la longitud se doblan las pérdidas.

V.2.3.2.- PERDIDAS EN EL ESPACIO LIBRE

En el espacio libre, la relación de potencias viene dada por

$$\frac{P_S}{P_e} = G_T \; G_R \; \left(\frac{\lambda}{4\pi l}\right)^2$$

donde G_T y G_R son las ganancias de las antenas transmisora y receptora, respectivamente y λ la longitud de onda.

Las pérdidas en dBs serán

$$L_{dB} = -(G_{TdB} + G_{RdB}) + 22 + 20 \log l/\lambda \text{ dBs}$$

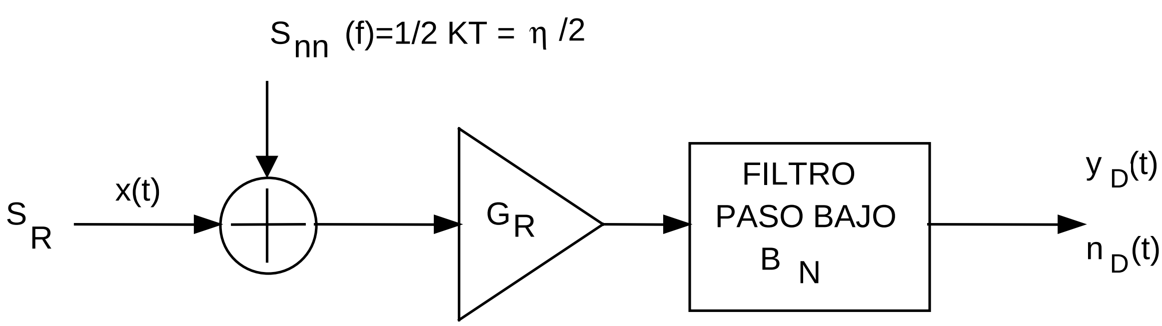
Obsérvese que en este caso las pérdidas son proporcionales al logaritmo de la longitud del enlace, esto hace que el espacio libre sea preferible para grandes distancias entre transmisor y receptor.

V.2.4.- RECEPTOR

El propósito del receptor es recuperar la señal mensaje original a partir de la versión degradada de la señal transmitida a través del canal. Si sólo hubiese atenuación bastaría con amplificar la señal hasta niveles suficientes y necesarios para el destinatario del mensaje. Pero el canal distorsiona la señal y además estará contaminada con ruido.

V.2.4.1.- RUIDO BLANCO ADITIVO

El ruido procede de una amplia variedad de mecanismos y entra en el sistema en todos sus puntos. Sin embargo, sus efectos son más perturbadores cuanto más bajo es el nivel de señal, esto es, en el receptor. Suponiendo ruido blanco aditivo y ausencia de distorsión en el canal, el receptor estará formado simplemente por un amplificador y un filtro paso bajo como en la figura.



- x(t) es la señal de entrada al receptor que supondremos estacionaria y ergódica con potencia

$$S_R = E\{x^2(t)\} = \overline{x^2(t)}$$

- G_R es la ganancia en potencia del amplificador.

- $S_{nn}(f)$ es la densidad espectral de potencia de ruido que se supone blanco y aditivo.

$$S_{nn}(f) = \frac{1}{2}\, kT = \eta/2$$

$k = 1{,}37.10^{-23}$ Julios/°k constante de Boltzmann
T = Temperatura efectiva de ruido

Este ruido incluye tanto el procedente del canal como el generado por el propio receptor, de esta forma el receptor de considera ideal, sin ruido.

- El filtro paso bajo se considera ideal con un ancho de banda adaptado a la señal mensaje.

La salida del receptor será

$$y_D(t) = \sqrt{G_R}\; x(t) + n_D(t)$$

Suponiendo que el ruido es ergódico también y de media nula

$$\overline{n_D(t)} = 0$$

y que está incorrelado con la señal

$$\overline{x(t)\, n_D(t)} = 0$$

(Ambas hipótesis son bastante plausibles)

La potencia a la salida será

$$\overline{y_D{}^2(t)} = G_R\, \overline{x^2(t)} + \overline{n_D{}^2(t)} = G_R\, S_R + N_D = S_D + N_D$$

Donde la potencia de ruido blanco vendrá dada por

$$N_D = G_R \int_{-\infty}^{\infty} |H_R(f)|^2 \, S_{nn}(f)\, df = G_R \, \eta \, B_N$$

$H_R(f)$ = Respuesta frecuencial del filtro

El parámetro que determina la calidad final del sistema de transmisión es la relación señal/ruido (generalmente expresada en dBs)

$$\left(\frac{S}{N}\right)_D \underline{\Delta} \frac{S_D}{N_D} = \frac{S_R}{\eta B_N} = \frac{S_T}{L \eta B_N}$$

Conclusión :

En un sistema sin distorsión y con ruido blanco aditivo, la relación señal/ruido está determinada por la potencia transmitida, por las pérdidas en el canal, por la densidad espectral de potencia de ruido y por el ancho de banda del filtro receptor y es independiente de la ganancia del receptor, la relación puede mejorarse :

- Aumentando la potencia transmitida. No obstante, esta potencia no puede crecer indefinidamente bien por límites físicos de los dispositivos amplificadores bien por la complejidad y coste del equipo.

- Minimizando la densidad espectral de potencia de ruido cuidando el diseño del receptor. Tiene las mismas limitaciones que el anterior.

- Disminuyendo al máximo el ancho de banda del filtro. El límite viene impuesto por el ancho de banda de la señal mensaje.

- La longitud del enlace es fija y por tanto las pérdidas también lo serán. No obstante, en el adaptado siguiente se verá un medio de aumentar la relación señal/ruido interviniendo en el parámetro L

EJEMPLOS DE RELACIONES SEÑAL/RUIDO EN ALGUNOS SISTEMAS DE TRANSMISION

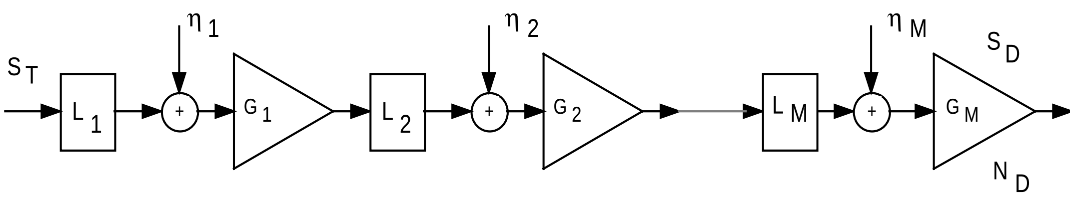
TIPO SEÑAL	BANDA DE FRECUENCIAS	S/N dBs
Voz inteligible	500 Hz - 2 kHz	5-10
Voz calidad telefónica	300 Hz - 3.4 kHz	25-35
Radiodifusión AM	100 Hz - 5 kHz	40-50
Alta Fidelidad Audio	20 Hz - 20 kHz	55-65
Televisión Video	60 Hz - 4.2 MHz	45-55

COMENTARIO :

Si el ruido no es aditivo y no está incorrelado con la señal, la relación señal/ruido es ambigua y no tiene gran significado.

V.3.- REPETIDORES

La manera de aumentar la relación señal/ruido actuando sobre el parámetro de pérdidas L, es utilizando repetidores (filtros + amplificadores) entre el transmisor y el receptor. El enlace se divide en M-subsecciones como indicado en la figura.



La misión de los repetidores es elevar el nivel de potencia de señal compensando las pérdidas de subsecciones precedentes.

El último repetidor coincide con el receptor y los filtros paso bajo están incluidos en los bloques amplificadores.

Para simplificar el análisis vamos a suponer que :

- Cada amplificador compensa exactamente las pérdidas de la subsección precedente, es decir

$$G_i \;/\; L_i \;= 1$$

- Todas las subsecciones son iguales.

En estas condiciones la señal en el destino tendrá la misma potencia que la transmitida.

$$S_D \;= S_T$$

La contribución al ruido en recepción por el repetidor iésimo será

$$N_{Di} \;= \eta_i \;\; B_N \frac{G_i \; G_{i+1} \;.\;.\;.\; G_M}{L_{i+1} \; L_{i+2} \;.\;.\;.\; \; L_M} \;= G_i \;\; \eta_i \;\; B_N \;= L_i \;\; \eta_i \;\; B_N$$

Puesto que todas las subsecciones son iguales y

$$L = L_1 \;\; L_2 \;\; .\;.\;.\; L_M \;\; = L_i^M$$

La potencia de ruido total será

$$N_D \;= MN_{Di} \;= ML^{1/M} \;\; \eta B_N$$

y la relación señal ruido

$$\left(\frac{S}{N}\right)_D \;= \frac{S_T}{ML^{1/M} \; \eta B_N}$$

para compárala con la S/N sin repetidores supongamos M=2 L=100; $ML^{1/M}$ = 20, es decir, la relación señal/ruido se multiplica por 5.

El número de repetidores óptimo se obtiene minimizando $ML^{1/M}$, esto es

$$\frac{d}{dM} \;(ML^{1/M}\,) \;\; = L^{1/M} \;\; - M \,\frac{1}{M^2} \;\; \ln L \;\; L^{1/M} \;\; = 0$$

de donde se obtiene

M = Entero [ln L]

en el ejemplo anterior saldría M = 5.

V.4.- DISTORSION

Además de pérdidas, el canal introducirá cierta distorsión en la señal mensaje. Para que no hubiese distorsión el canal tendría que tener una respuesta frecuencial de la forma

$$H_C(f) = \frac{1}{\sqrt{L}} e^{-j2\pi f t_C}$$

En estas condiciones si s(t) es la señal de entrada al canal, la señal de salida será

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{L}} s(t-t_C)$$

L representa las pérdidas.

En realidad las condiciones de amplitud constante y desfasaje lineal en la respuesta frecuencial sólo es preciso que se cumplan en el ancho de banda de la señal. No obstante, dicha respuesta no será realizable físicamente de manera exacta por lo que tono canal presentará alguna distorsión. Lo importante es minimizar esta distorsión.

Este tipo de distorsión es en general lineal.

Otro tipo de distorsión es la que aparece debido a la existencia de elementos no lineales en el transmisor; es el caso de la denominada distorsión no lineal.

V.4.1.- DISTORSION LINEAL

La distorsión lineal puede ser de amplitud, de fase o de ambas. La distorsión de amplitud se produce cuando la amplitud de la respuesta frecuencial del canal no es constante en el ancho de banda de la señal y la de fase cuando ésta no es lineal. En general

$$H(f) = |H(f)|\, e^{j\phi(f)}$$

El retardo temporal a la frecuencia f viene dado por

$$t_c(f) = -\frac{\phi(f)}{2\pi f}$$

La distorsión de fase es equivalente a decir que cada una de las componentes frecuenciales sufre un retardo distinto por lo que al componerse a la salida, la forma de onda de la señal sufrirá alteraciones y por tanto habrá distorsión. El oído humano es bastante insensible a las distorsiones de fase por lo que esta distorsión no es muy importante en telefonía. Sin embargo, como veremos, es bastante crítica en transmisión de pulsos.

Un ejemplo de distorsión de amplitud es la causada por la señal multicamino debido a dos o más caminos diferentes de propagación, aunque el canal sea ideal. La señal de salida es de la forma

$$x(t) = k_1\, x(t-t_1) + k_2\, x(t-t_2)$$

y la respuesta equivalente del canal

$$H(f) = k_1\, e^{-j2\pi f t_1} + k_2\, e^{-j2\pi f t_2}$$

El cuadrado del módulo será

$$|H(\omega)|^2 = k_1^2 + k_2^2 + 2k_1 k_2 \cos 2\pi f(t_2 - t_1)$$

suponiendo que el eco es de pequeña amplitud, es decir,

$$k_2/k_1 \ll 1$$

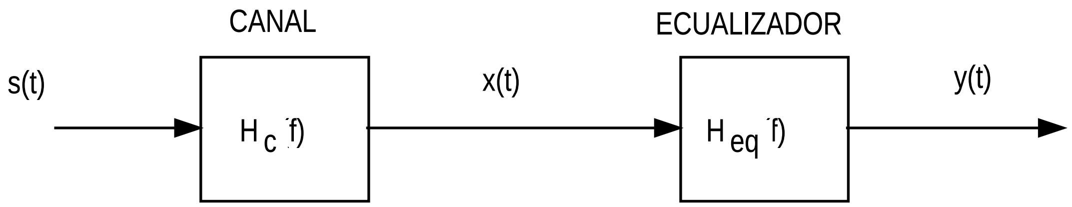
La amplitud de la respuesta frecuencial tendrá la forma

$$|H(\omega)| \cong k_1 \left[1+2\frac{k_2}{k_1}\cos 2\pi f(t_2-t_1)\right]^{1/2} \cong k_1 \left[1+\frac{k_2}{k_1}\cos 2\pi f(t_2-t_1)\right]$$

Es decir el eco débil produce un rizado de la amplitud de la respuesta frecuencial y viceversa.

V.4.1.1.- ECUALIZADORES

La distorsión lineal puede corregirse mediante el uso de ecualizadores



Es evidente que para que y(t) sea una versión no distorsionada de s(t), se debe verificar que

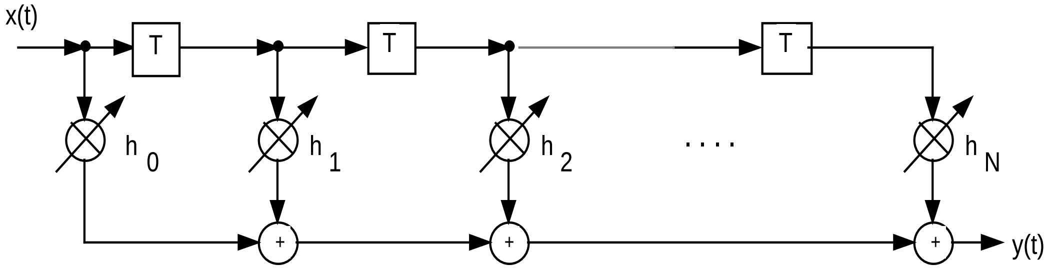
$$H_c(f)\ H_{eq}(f) = ke^{-j2\pi ft_c}$$

donde k y t_c son constantes

$$H_{eq}(f) = \frac{ke^{-j2\pi ft_c}}{H_c(f)}$$

Es bastante improbable que podamos diseñar exactamente la respuesta frecuencial del ecualizador, pero en muchos casos es posible obtener una aproximación que reduzca a valores aceptables la distorsión final.

Una de las técnicas más antiguas de ecualización de las líneas telefónicas es al pupinización que consiste en colocar bobinas en serie a lo largo de la línea para compensar el efecto capacitivo. Más moderno es el uso de filtros transversales o "tap-delay line" como el de la figura.



La señal de salida tendrá la forma

$$y(t) = \sum_{n=0}^{N} h_n \, x(t-nT)$$

La respuesta frecuencial del filtro será

$$H(f) = \sum_{n=0}^{N} h_n \, e^{-jn2\pi fT}$$

Si N es impar N = 2M+1, realizando el cambio de subíndices n-M = m, se tendrá

$$H(f) = e^{-jM2\pi fT} \sum_{m=-M}^{M} W_m \, e^{-jm2\pi fT} \qquad W_m = h_{m+M}$$

Expresión más familiar que, salvo un factor de fase, se trata de un desarrollo en serie de Fourier truncado. El periodo es 1/T. Por tanto si tenemos un canal para ser ecualizado con $H_c(f)$ definida en $|f| < B_N$, la $H_{eq}(f)$ puede aproximarse por los M primeros términos del desarrollo en serie de Fourier de manera que $1/T \geq 2B_N$. Esta condición determinaría el T y el número de coeficientes (multiplicadores del filtro) dependerá del grado de aproximación que se quiera obtener.

Como ejercicio puede ecualizarse el canal multicamino del apartado anterior

$$H_{eq}(f) = k \frac{e^{-j2\pi ft_c}}{H_c(t)} = \frac{k}{k_1} \frac{e^{-j2\pi f(t_c-t_1)}}{1+\frac{k_2}{k_1} e^{-j2\pi f(t_2-t_1)}} \cong$$

$$\frac{k}{k_1} e^{-j2\pi f(t_c-t_1)} \left[1 - \frac{k_2}{k_1} e^{-j2\pi f(t_2-t_1)} + \left(\frac{k_2}{k_1}\right)^2 e^{-j4\pi f(t_2-t_1)} \right]$$

Si se cumple que $t_2 - t_1 \leq \frac{1}{2B_N}$ puede elegirse $T = t_2 - t_1$ y los coeficientes serán, sacando factor común $e^{-j2\pi f(t_2-t_1)}$

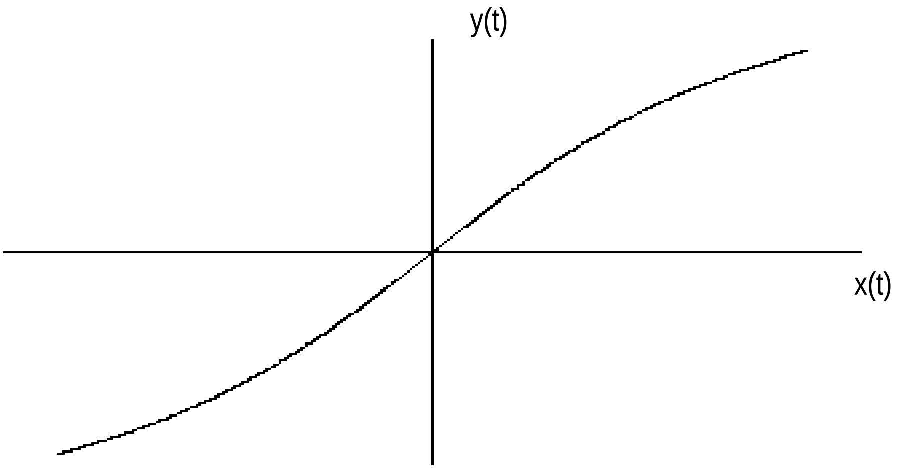
$$W_{-1} = 1$$

$$W_o = -\frac{k_2}{k_1}$$

$$W_1 = \left(\frac{k_2}{k_1}\right)^2$$

V.4.2.- DISTORSION NO LINEAL

Este tipo de distorsión se produce en sistemas que tienen elementos no lineales. En este caso, el sistema no puede ser definido por una función de transferencia sino por las características entrada-salida.



Esta característica es típica de los efectos de corte y saturación de los amplificadores de estado sólido cuando la entrada es de gran potencia. Cuando la señal de entrada es de bajo nivel la característica entrada-salida se puede considerar lineal. En el caso general, la característica puede aproximarse por una función polinómica de la forma

$$y(t) = a_1\, x(t) + a_2\, x^2(t) + \ldots + a_N\, x^N(t)$$

Las potencia superiores a la unidad son las que producen la distorsión no lineal. Aunque no haya función de transferencia, la transformada de Fourier de la salida será

$$y(t) = a_1\, X(f) + a_2\, X(f) * X(f) + \ldots + a_N\, \underbrace{X(f) \ldots * X(f)}_{N \text{ veces}}$$

Así si x(t) está limitada a la banda B_N , la salida tendrá un ancho de banda de NB_N siendo N el orden de la no linealidad. Puesto que todos los términos tienen frecuencias en $|f| < B_N$ que se solapan con X(f), no será posible eliminar esta distorsión mediante filtrado.

Una medida de esta distorsión puede obtenerse considerando la señal de entrada

$$x(t) = \cos\omega_o t$$

la salida será

$$y(t) = \left(\frac{a_2}{2} + \frac{3a_4}{8} + \ldots\right) + \left(a_1 + \frac{3a_2}{4} + \ldots\right)\cos\omega_o t +$$

$$+ \left(\frac{a_2}{2} + \frac{a_4}{4} + \ldots\right)\cos 2\omega_o t + \ldots$$

A esta distorsión se le conoce con el nombre de distorsión armónica. La distorsión del segundo armónico es :

$$D_2 = \frac{a_1/2 + a_4/4 + \ldots}{a_1 + 3a_3/4 + \ldots}\; .\, 100\ \%$$

Una aplicación interesante de estos dispositivos no lineales es la multiplicación de frecuencias.

Otro caso interesante es cuando la entrada es una combinación lineal de dos frecuencias.

$$x(t) = A_o \cos\omega_o t + A_1 \cos\omega_1 t \qquad \omega_o \neq \omega_1$$

La salida es

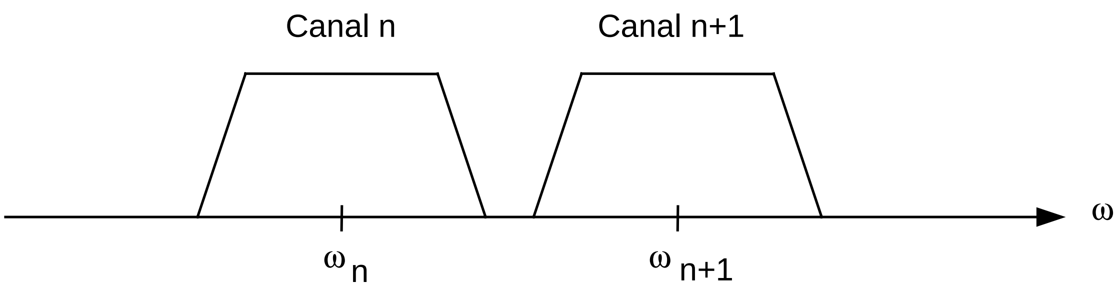
$$y(t) = a_1\, A_o \cos\omega_o t + a_1\, A_1 \cos\omega_1 t$$

$$+ a_2\, (A_o^2/2 + A_1^2/2)$$

$$+ a_2 (A_o^2/2 + A_1^2/2) (\cos 2\omega_o t + \cos 2\omega_1 t)$$

$$+ a_2\ A_o\ A_1\ [\cos(\omega_o + \omega_1)t + \cos(\omega_o - \omega_1)t] + \ldots$$

Además de los armónicos de las frecuencias de entrada aparecen las frecuencias suma y diferencia. Este tipo de distorsión se conoce como distorsión de intermodulación y es sumamente peligrosa cuando se utiliza multiplexación por división de frecuencia (FDM) para transmitir varios canales de información.



En general si la entrada es

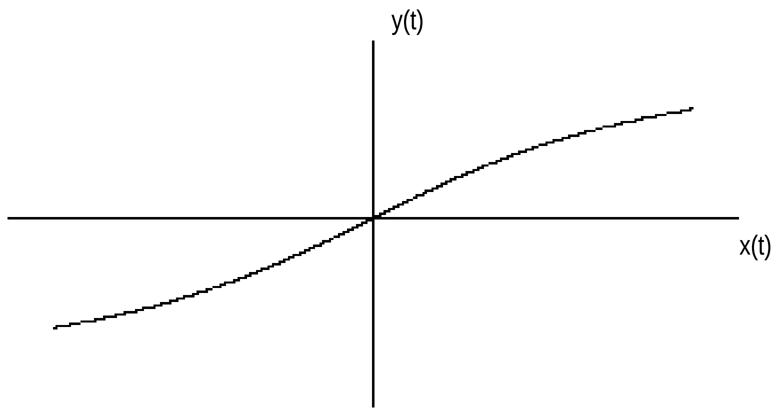
$$x(t) = x_1 (t) + x_2 (t)$$

La salida tendrá términos de la forma $X_1(f) * X_2(f)$ y aunque $X_1(f)$ y $X_2(f)$ estén separados en frecuencia, su convolución puede solapar a ambos. Este tipo de distorsión se denomina "cross-talk" en telefonía.

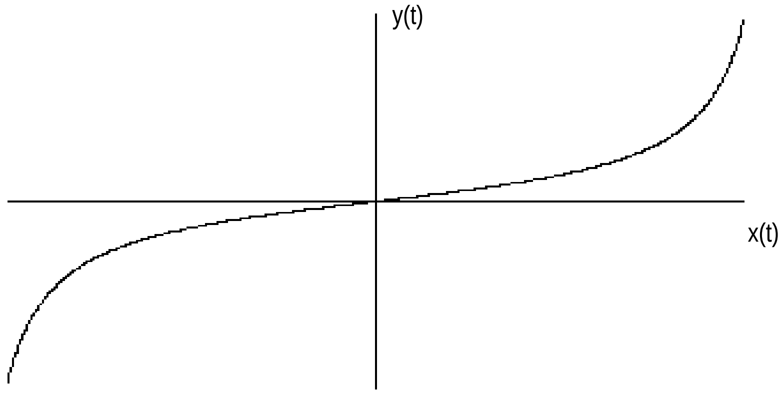
Del resultado anterior se deduce que otra aplicación interesante de los dispositivos no lineales es la de mezcladores o conversores de frecuencia (moduladores-demoduladores).

V.4.2.1.- COMPRESORES Y EXPANSORES

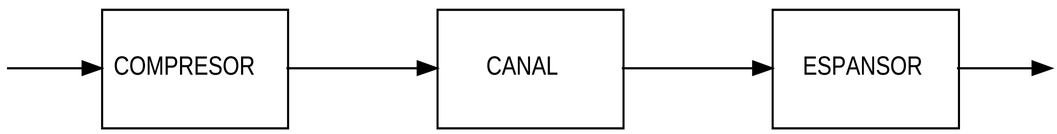
Una forma de disminuir la distorsión no lineal es cuidando que el nivel de la señal de entrada no exceda el rango de operación lineal del dispositivo. Para ello se utiliza un compresor que reduzca el margen dinámico a la entrada y un expansor que restituya el margen dinámico a la salida.



COMPRESOR

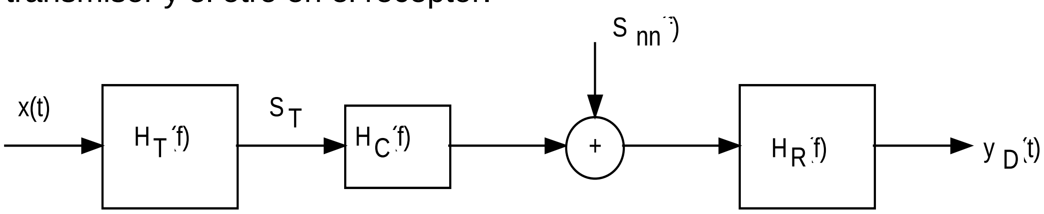


EXPANSOR



V.5.- FILTROS TERMINALES OPTIMOS

Si el ruido en el receptor no es blanco y además quiere obtenerse una buena ecualización del canal, pueden utilizarse dos filtros terminales, uno en el transmisor y el otro en el receptor.



Si los filtros ecualizan perfectamente el canal se tendrá

$$H_T(f)\ H_c(f)\ H_R(f) = ke^{-j2\pi f t_c}$$

y la señal de salida será

$$y_D(t) = kx(t-t_c) + n_D(t)$$

Las potencias de señal y ruido en destino son

$$S_D = k^2\,\overline{x^2(t)}$$

$$N_D = \int_{-\infty}^{\infty} |H_R(f)|^2\, S_{nn}(f)\, df$$

Para determinar los filtros terminales óptimos que maximizan la relación señal/ruido $(S/N)_D$ debemos maximizar ésta manteniendo constante la potencia transmitida o equivalentemente minimizar

$$\frac{S_T N_D}{S_D}$$

teniendo en cuenta que

$$S_T = \int_{-\infty}^{\infty} |H_T(f)|^2\, S_{xx}(f)df$$

y la expresión de ecualización del canal, puede escribirse

$$\frac{S_T N_D}{S_D} = \frac{1}{\overline{x^2(t)}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S_{xx}(f)}{|H_c(f)H_R(f)|^2}\, df \int_{-\infty}^{\infty} |H_R(f)|^2\, S_{nn}(f)df$$

Donde únicamente se ha dejado como función de control de diseño el filtro en el receptor.

La minimización de la expresión anterior requeriría utilizar el cálculo variacional. No obstante utilizando la desigualdad de Schwarz.

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} VW^{*} df \right|^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} |V|^2 df \int_{-\infty}^{\infty} |W|^2 df$$

Identificando

$$V \equiv \frac{S_{xx}^{1/2}(f)}{|H_c(f)\ H_R(f)|}$$

$$W \equiv |H_R(f)|\ S_{nn}^{1/2}(f)$$

y teniendo en cuenta que el signo igual sucede cuando V = cte.W se tiene finalmente que

$$|H_R(f)|_{op}^2 = \frac{S_{xx}^{1/2}(f)}{|H_c(f)| S_{nn}^{1/2}(f)}$$

y por tanto

$$|H_T(f)|_{op}^2 = \frac{k^2 S_{nn}^{1/2}(f)}{|H_c(f)|\ S_{xx}^{1/2}(f)}$$

Donde se observa que $H_R(f)$ desenfatiza aquellas frecuencias donde la densidad espectral de ruido es grande y la de señal pequeña mientras que $H_T(f)$ hace lo contrario. Las fases no aparecen, pero deben ser tales que verifiquen la relación de ecualización del canal.

Este tipo de filtros son los que se utilizan en FM (filtros de preénfasis y deénfasis).

La relación señal/ruido óptima es

$$(S/N)_{Dop} = \frac{S_T}{(S_T N_D/S_D)_{op}} = \frac{S_T\,\overline{x^2(t)}}{\left|\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{S_{xx}^{1/2}(f)\, S_{nn}^{1/2}(f)}{|H_c(f)|}\, df\right|^2}$$

En la práctica, estos filtros no pueden sintetizarse de manera exacta ya que el espectro de potencia de señal no es conocido. Los filtros deben optimizar la relación señal/ruido para diferentes entradas. En este caso se puden suponer una densidad espectral de potencia de señal constante.

$$S_{xx}(f) = \frac{\overline{x^2(t)}}{2B_N}\, \Pi\left(\frac{f}{2B_N}\right)$$

No se tendrá el diseño óptimo pero seguirá siendo bueno.

Si ahora suponemos que el canal sólo tiene pérdidas $|H_c(f)|^2 = 1/L$ y que el ruido es blanco $S_{nn}(f) = \eta/2$, la relación señal/ruido anterior se convierte en

$$(S/N)_{Dop} = \frac{S_T}{L\eta B_N}$$

Que es la misma relación encontrada anteriormente, pero que ahora podemos decir que es óptima.